Дополнение. Зависимость ослабления света от зенитного расстояния

Имеется серия фотографий звездного поля, сделанная с небольшим интервалом времени. Всего на поле M звезд, а количество фотографий обозначим N. Кроме того, обозначим:

- $m_{\text{вид}}$ - видимая звездная величина звезды. Оценить её на глаз проблематично, поэтому этот параметр объявляем неизвестным.
- $L_{\text{вид}}$ - видимая линейная яркость звезды. Определить яркость в линейных единицах возможно, например, при помощи программы **Maxim**. Таким образом, этот параметр известен.

Нам необходимо рассмотреть одну и ту же звезду на двух разных фотографиях. Пусть $(m_{\text{вид}})_1$ и $(m_{\text{вид}})_2$ - видимые звездные величины одной и той же звезды на разных фотографиях. Высота звезды H составляет H_1 на первой фотографии и H_2 на второй. Мы можем записать, что

$$\begin{cases} m_{\text{вид}} \equiv m_{\text{вид}}|_{H=90} & \text{при} \quad H = 90^\circ \\ m_{\text{вид}} > m_{\text{вид}}|_{H=90} & \text{при} \quad H < 90^\circ \end{cases}$$

Введем величину Z - зенитное расстояние звезды, $Z = 90^\circ - H$, тогда $m_{\text{вид}}|_{H=90} \equiv m_{\text{вид}}|_{Z=0}$, $Z_1 = 90^\circ - H_1$ и $Z_2 = 90^\circ - H_2$.

$$\begin{cases} m_{\text{вид}} \equiv m_{\text{вид}}|_{Z=0} & \text{при} \quad Z = 0^\circ \\ m_{\text{вид}} > m_{\text{вид}}|_{Z=0} & \text{при} \quad Z > 0^\circ \end{cases}$$

Предположим, что $m_{\text{вид}}$ линейно зависит от Z, а именно: $m_{\text{вид}} = m_{\text{вид}}|_{Z=0} + kZ$, где k - коэффициент пропорциональности.

Используем формулу Погсона, куда подставим видимую звездную величину двух разных наблюдений одной и той же звезды (мы обозначили их $(m_{\text{вид}})_1$ и $(m_{\text{вид}})_2$). Соответствующие линейные яркости этой же звезды в тех же двух наблюдениях обозначим $(L_{\text{вид}})_1$ и $(L_{\text{вид}})_2$. Тогда

$$(m_{\text{вид}})_1 - (m_{\text{вид}})_2 = -2.5\lg((L_{\text{вид}})_1/(L_{\text{вид}})_2)$$

Преобразуем разность звездных величин:

$$(m_{\text{вид}})_1 - (m_{\text{вид}})_2 = (m_{\text{вид}}|_{Z=0} + kZ_1) - (m_{\text{вид}}|_{Z=0} + kZ_2) = kZ_1 - kZ_2 = k\cdot(Z_1 - Z_2)$$

Тогда получаем

$$k\cdot(Z_1 - Z_2) = -2.5\lg((L_{\text{вид}})_1/(L_{\text{вид}})_2) \qquad k = \frac{2.5\lg((L_{\text{вид}})_1/(L_{\text{вид}})_2)}{Z_2 - Z_1}$$

Так мы определяем k по одной звезде и двум фотографиям. Всего у нас имеется N фотографий, то есть, каждая звезда сфотографирована N раз. Чтобы один раз определить k, нам нужна пара разных наблюдений одной и той же звезды. Если у нас N наблюдений этой звезды, то мы можем составить $N(N-1)/2$ пар наблюдений, и определить $N(N-1)/2$ значений для k, только по одной звезде. Если звезд M, то всего мы получим $MN(N-1)/2$ значений для k.

Обозначим $Z_{(j)}^{(i)}$ - зенитное расстояние j-той звезды на i-той фотографии; $L_{\text{вид}(j)}^{(i)}$ - видимая линейная яркость j-той звезды на i-той фотографии. i - номер фотографии, меняется от 1 до N; j - номер звезды, меняется от 1 до M. Если речь о двух разных наблюдениях одной и той же звезды, значит i разные (обозначим i_1 и i_2), а j - одно и то же. $MN(N-1)/2$ значений для k получаем следующим образом:

$$k = \frac{2.5\lg(L_{\text{вид}}{}^{(i_1)}_{(j)} / L_{\text{вид}}{}^{(i_2)}_{(j)})}{Z^{(i_2)}_{(j)} - Z^{(i_1)}_{(j)}} \quad \text{где} \quad \begin{cases} j = 1...M \\ i_1 = 1...(N-1) \\ i_2 = (i_1+1)...N \end{cases}$$

Далее рассмотрим более точный способ. Предположим, что $m_{\text{вид}}$ зависит от Z не линейно, а полиноминально:

$$m_{\text{вид}} = A_0 + A_1 Z + A_2 Z^2 + A_3 Z^3 + ... + A_n Z^n$$

Здесь n - степень полинома; A_0, A_1, A_2, …, A_n - коэффициенты. Коэффициент A_0 - это примерно то же, что в прошлый раз мы обозначили как $m_{\text{вид}}|_{Z=0}$. Коэффициент A_1 - это примерно то же, что в прошлый раз мы обозначили как k. Остальные коэффициенты в прошлый раз были равны нулю.

Используем формулу Погсона, куда подставим видимую звездную величину двух разных наблюдений одной и той же звезды (мы обозначили их $(m_{\text{вид}})_1$ и $(m_{\text{вид}})_2$). Соответствующие линейные яркости этой же звезды в тех же двух наблюдениях обозначим $(L_{\text{вид}})_1$ и $(L_{\text{вид}})_2$. Тогда

$$(m_{\text{вид}})_1 - (m_{\text{вид}})_2 = -2.5\lg((L_{\text{вид}})_1 / (L_{\text{вид}})_2)$$

Преобразуем разность звездных величин:

$$(m_{\text{вид}})_1 - (m_{\text{вид}})_2 =$$
$$= (A_0 + A_1 Z_1 + A_2 Z_1^2 + A_3 Z_1^3 + ... + A_n Z_1^n) - (A_0 + A_1 Z_2 + A_2 Z_2^2 + A_3 Z_2^3 + ... + A_n Z_2^n) =$$
$$= A_1(Z_1 - Z_2) + A_2(Z_1^2 - Z_2^2) + A_3(Z_1^3 - Z_2^3) + ... + A_n(Z_1^n - Z_2^n)$$

Тогда получаем:

$$A_1(Z_1 - Z_2) + A_2(Z_1^2 - Z_2^2) + A_3(Z_1^3 - Z_2^3) + ... + A_n(Z_1^n - Z_2^n) = -2.5\lg((L_{\text{вид}})_1 / (L_{\text{вид}})_2)$$
$$A_1(Z_2 - Z_1) + A_2(Z_2^2 - Z_1^2) + A_3(Z_2^3 - Z_1^3) + ... + A_n(Z_2^n - Z_1^n) = 2.5\lg((L_{\text{вид}})_1 / (L_{\text{вид}})_2)$$

Так как зенитные расстояния звезд известны, то и величины $Z_2 - Z_1$, $Z_2^2 - Z_1^2$, $Z_2^3 - Z_1^3$, …, $Z_2^n - Z_1^n$ являются известными. Величина $2.5\lg((L_{\text{вид}})_1 / (L_{\text{вид}})_2)$ также известна. Имеем линейное уравнение с неизвестными коэффициентами A_1, A_2, …, A_n.

Если всего у нас N фотографий и M звезд, то мы можем рассмотреть $MN(N-1)/2$ пар наблюдений, и получить систему из $MN(N-1)/2$ уравнений. Чтобы число неизвестных совпало с числом уравнений, возьмем $n = MN(N-1)/2$. Система из $n = MN(N-1)/2$ линейных уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} &A_1(Z^{(i_2)}_{(j)} - Z^{(i_1)}_{(j)}) + A_2((Z^{(i_2)}_{(j)})^2 - (Z^{(i_1)}_{(j)})^2) + A_3((Z^{(i_2)}_{(j)})^3 - (Z^{(i_1)}_{(j)})^3) + \\ &+ ... + A_n((Z^{(i_2)}_{(j)})^n - (Z^{(i_1)}_{(j)})^n) = 2.5\lg((L_{\text{вид}})_1 / (L_{\text{вид}})_2) \end{aligned} \qquad \begin{cases} j = 1...M \\ i_1 = 1...(N-1) \\ i_2 = (i_1+1)...N \end{cases}$$

Решая её (например, методом Гаусса), получаем A_1, A_2, …, A_n.

Обычно, значение $MN(N-1)/2$ довольно велико, и чтобы не решать огромную систему, можно задать $n < MN(N-1)/2$, и решить много систем, но более мелких. Итак, пусть $n < MN(N-1)/2$. У нас $MN(N-1)/2$ различных уравнений в принципе, но составляя очередную систему, мы должны использовать только n из них. Возможное число систем уравнений, которое можно будет записать – это число сочетаний из $MN(N-1)/2$ по n.

$$C^n_{MN(N-1)/2} = \frac{(MN(N-1)/2)!}{(MN(N-1)/2 - n)! \cdot n!}$$

У нас будет $C^n_{MN(N-1)/2}$ систем уравнений, и решение каждой даст набор коэффициентов A_1, A_2, …, A_n. Пусть некий параметр l меняется от 1 до n, а s меняется от 1 до $C^n_{MN(N-1)/2}$. Тогда $A_l^{(s)}$ - это l-тый коэффициент, полученный в решении s-той системы уравнений. Таким образом, для каждого коэффициента будем иметь $C^n_{MN(N-1)/2}$ значений.